絶対収束/条件収束する級数の項の並べ替え

H.Hiro http://hhiro.net/

2017 年 4 月 14 日（最終更新）

1　はじめに

この記事はもともと、科学系ソーシャルコミュニティ「なぞらぼ」（nazolab.net）で公開していた記事でした。なぞらぼのサービスが終了したため、別途掲載するものです。

なお、なぞらぼの内容は Wayback Machine には残っています。こちらもご覧ください。http://web.archive.org/web/20150822211807/http://nazolab.net/notes/n/279

参考文献

- 井上純治、勝股脩、林実樹広「級数」、共立出版 http://www.amazon.co.jp/dp/4320015878
  定理 1 を知ったのがこのテキストでした。またこのテキストには定理 1(1) の証明しか載っていなかったため、定理 1(2) の証明を調べ始めた、というのがこの記事を書いたきっかけでした。
- 清野和彦「2011 年度数学 IA 演習第 13 回」（東京大学） http://lecture.ecc.u-tokyo.ac.jp/~nkiyono/kiyono/kami11-13.pdf
  定理 1(2) についての記事で、証明の方針が載っており、本記事はこの方針に近い記述をしています。また、例 2 はこの記事を参考にしています。
- Riemann series theorem（英語版 Wikipedia）https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_series_theorem
  定理 1(2) についての記事で、証明が載っています（が、本記事の証明とは記法がかなり違います）。

2　定義と主結果

以下、扱う数はすべて実数とする。

定義 1.

1. 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束し、かつ $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ も収束するとき、前者の級数は**絶対収束**するという。
2. 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束する一方、$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ は収束しないとき、前者の級数は**条件収束**するという。

補足 1. 級数が絶対収束するならば、もとの級数も収束する。（証明は省略）

定理 1.

(1) 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が絶対収束するとき、この級数の項を並べ替えても級数の値は変わらない。

(2) 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が条件収束するとき、この級数の項を適当に並べ替えることで、その値を任意の実数にできる。また、$+\infty$ や $-\infty$ にもできる。（**リーマンの級数定理**）

補足 2. 「級数の項の順序を並び替えても値は変わらないんじゃない?」というのが自然な感覚だろう。しかしそれが保証されるのは絶対収束する場合に限られる、というのがこの定理の趣旨である。それどころか、条件収束であれば、うまく並び替えることで値を自由に変えられるというのである。

例 1. 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \cdots$ は絶対収束する $\left(\because \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{2^n}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2\right)$。よって、級数の和を取る順番を変えても級数の値は変わらない（なお、その値は $\frac{2}{3}$ である）。

例 2. 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$ は $\ln 2$ に収束する（証明省略）ものの、各項の絶対値を取った上で和を取ると収束しない $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \to +\infty\right)$ ので、条件収束である。ところで

$$
\begin{aligned}
S &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} \cdots \\
T &= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots \quad \text{（正の項を \textit{2} つ→負の項を \textit{1} つ、の順で並べる）} \\
U &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots \quad \text{（正の項を \textit{1} つ→負の項を \textit{2} つ、の順で並べる）}
\end{aligned}
$$

とすると、どれも級数の値は変わってしまう。実際、

$$
\begin{aligned}
T &= S + \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \cdots\right)
\end{aligned}
$$

（S の「$-\frac{1}{4}$」の項までと T の「$-\frac{1}{2}$」の項まで、S の「$-\frac{1}{8}$」の項までと T の「$-\frac{1}{4}$」の項まで、S の「$-\frac{1}{12}$」の項までと T の「$-\frac{1}{6}$」の項まで、…を対応付け、その差を加算している）

$$
= S + \frac{1}{2}S = \frac{3}{2}\ln 2
$$

となり、T は S より大きくなる。また

$$
\begin{aligned}
U &= S - \left(\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{5} + \frac{1}{11}\right) + \cdots\right) \\
&= S - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{4n+3}\right) = S - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)(2n+1)(4n+3)}
\end{aligned}
$$

となり、U は S より小さくなる（末尾に残った級数は、$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)(2n+1)(4n+3)} < \frac{1}{32} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3}$ より有限確定であることに注意。）

3　証明

3.1　定理 1(1) の証明

$$
a_n^+ = \begin{cases} a_n & (\text{if } a_n \geq 0) \\ 0 & (\text{if } a_n < 0) \end{cases}, \quad a_n^- = \begin{cases} 0 & (\text{if } a_n \geq 0) \\ a_n & (\text{if } a_n < 0) \end{cases}
$$

と定める。このとき、$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$ であることに注意する。

補足 3. 一見すると、級数が二つに分割されているため、「これって一種の並び替えでは?」と見えるかもしれないが、「絶対収束であれば」この分割は問題ない。例えば上記の例では、$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \cdots$ を $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots$ と $-\frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{32} - \cdots$ に分けて足しても問題ない。というのは、絶対値を取った級数 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$ が収束するのだから、それらの一部の項を取って足し合わせた結果である $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots$ や $-\frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{32} - \cdots$ も収束するのである。

さて、$\{b_n\}$ を $\{a_n\}$ を並べ替えて得られる数列とし、$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^+ + \sum_{n=0}^{\infty} b_n^-$ と同様に定める。このとき、

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+ = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^+, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^-$$

が成り立つ。実際、$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+$ について考えると、$\{b_n\}$ は $\{a_n\}$ の並び替えなのだから、$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+$ 中に現れた項は必ず $\sum_{n=0}^{\infty} b_n^+$ にも現れているので、$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+ \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n^+$ でなければばならない（どちらも、級数のすべての項が正であることに注意）。しかし立場を逆にすれば $\sum_{n=0}^{\infty} b_n^+ \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n^+$ も成り立つので、結局 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n^+ = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^+$ が成り立つ。$\sum_{n=0}^{\infty} b_n^- = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$ についても同様である。以上より、$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=0}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^+ + \sum_{n=0}^{\infty} b_n^-$、すなわち $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ である。

【証明終】

3.2 定理 1(2) の証明

目標とする級数の値を T とし、それを達成する $\{a_n\}$ の並べ替えを $\{b_n\}$ とする。また、$\{a_n^+\}$ および $\{a_n^-\}$ は定理 1(1) の証明と同様に定義するが、値が 0 である項はあらかじめ除外しておくものとする。

まず、T が $+\infty$ や $-\infty$ ではなく単なる実数の場合、目標とする級数の値を得るための並び替え $\{b_n\}$ をアルゴリズムとして書くと以下のようになる。

1. $S \leftarrow 0$
2. $n \leftarrow 1, i \leftarrow 1, j \leftarrow 1$
3.
   - もし $S \leq T$ ならば、$b_n \leftarrow a_i^+$ としたうえで、$i \leftarrow i+1$
   - もし $S > T$ ならば、$b_n \leftarrow a_j^-$ としたうえで、$j \leftarrow j+1$
4. $S \leftarrow S + b_n, n \leftarrow n+1$ とし、3 に戻る

つまり、現時点での部分和 $S = \sum_{k=1}^{n} b_k$ が目標とする級数の値を下回っているときは、$\{a_n\}$ から正の項を一つ持ってきて、逆に上回っているときには $\{a_n\}$ から負の項を一つ持ってきている。

このアルゴリズムによって得られる $\{b_n\}$ が、$\{a_n\}$ の並び替えであり、かつその和が T に収束することは、以下のように示される。

並び替えであること これをいうためには、$\{a_n\}$ の任意の項が $\{b_n\}$ に現れることを示さなければならない。

上記のアルゴリズムは無限に続けられるため、$\{a_n\}$ の任意の項が $\{b_n\}$ に現れなくなりうる状況としては、$\{a_n\}$ から負の項を有限個しか持ってこない（j が途中から動かなくなる）、あるいは正の項を有限個しか持ってこない（i が途中から動かなくなる）場合のどちらかのみである。

しかしこのことは実際起こりえない。なぜならば、この問題では $\sum_{i=0}^{\infty} a_n$ が条件収束、すなわち $\sum_{i=0}^{\infty} a_n^+$ や $\sum_{i=0}^{\infty} a_n^-$ は発散すると仮定しているため、（T を有限とすれば）$\{a_n\}$ の正の項ないし負の項のどちらかからのみ値を取り出すようにすると和が発散し、条件を満たさない。すなわち $\{a_n^+\}$ も $\{a_n^-\}$ も無限回利用されることが示された（十分 n を大きく取れば、i も j もいくらでも大きくできる）。

またその系として、「S が T を下回っていたのが上回る」ような n は無限個存在するし、逆に上回っていたのが下回るような n も無限個存在することが示される。

収束すること 上記のアルゴリズムについて、「任意の $\varepsilon > 0$ に対し、ある自然数 $N > 0$ が存在して、“任意の $n \geq N$ に対し $|S - T| \leq \varepsilon$ が成り立つ”」ことを示せばよい。

まず、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するのだから、$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である。すなわち任意の $\varepsilon > 0$ に対し、ある自然数 $M > 0$ が存在して、「任意の $n \geq M$ に対し $|a_n| \leq \varepsilon$」が成り立つ。

そうすると、もし上記のアルゴリズムで $i \geq M$ かつ $j \geq M$ まで進んでいれば（上記の「並び替えであること」の証明により、必ず進むことが保証されている）、それ以降は S の値は 1 項増やすご

とに（n を一つ増やすごとに）高々 ε しか変化しない。
しかも上述の通り、S の値が T を超えるケースは無限回存在するし、下回るケースも無限回存在するので、「$i \geq M$ かつ $j \geq M$ で、さらに S の値が一度 T を跨いだ」以降は、常に $|S-T| \leq \varepsilon$ となる。
以上より、任意の ε について、ある N が存在して $|S-T| \leq \varepsilon$ となるので、S は T に収束することが示された。ただし N は「上記アルゴリズムにて、i と j がともに M 以上となるような最小の n」に取る。

最後に、T が $+\infty$ ないし $-\infty$ の場合、上記のアルゴリズムに従って項を求めると、$\{b_n\}$ は $\{a_n\}$ から正の項のみあるいは負の項のみを持ってきたものとなり、並べ替えとはならない。しかし、以下のようにすれば並べ替えの形にできる（以下は T が $+\infty$ の場合）。

1. $S \leftarrow 0, U \leftarrow 0$
2. $n \leftarrow 1, i \leftarrow 1, j \leftarrow 1$
3.
   - もし $S \leq U$ ならば、$b_n \leftarrow a_i^+$ としたうえで、$i \leftarrow i+1$
   - もし $S > U$ ならば、$U \leftarrow S+1, b_n \leftarrow a_i^-$ としたうえで、$j \leftarrow j+1$
4. $S \leftarrow S + b_n, n \leftarrow n+1$ とし、3 に戻る

すなわち、正の項の値を足し合わせる過程である値 U を超えたら、そこで一度負の項の値を加えてから U の値を引き上げればよい。そうすれば、級数の部分和 S がいくらでも大きくなるような n の存在を保証できる。ここのアルゴリズムでは $U \leftarrow S+1$ としたが、U が単調に増加すれば $U \leftarrow 2S$ でも何でもよい。

【証明終】